⋆
## Exercice 1

On lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note $X$ la somme des faces obtenues et $Y$ le produit des faces obtenus.

1) Quels sont les valeurs prises par $X$ ? Par $Y$ ?
2) Déterminer la loi de probabilité de $X$ et de $Y$
3) Calculer l'espérance de $X$ et l'espérance de $Y$

⋆
## Exercice 2

Un joueur paie 10€ pour jouer à un jeu qui consiste à tirer une carte au hasard dans un paquet de cartes.

- S'il pioche un As, il gagne $a$€, où $a$ est un réel supérieur ou égal à 15.
- S'il pioche une figure (Roi, Dame, Valet), il gagne 15€
- S'il pioche un 8, un 9 ou un 10, il gagne 5€
- Dans tous les autres cas, il ne gagne rien.

On note $X$ le gain algébrique du joueur.

1) Déterminer la loi de $X$ en fonction de $a$.
2) Déterminer la fonction de répartition de $X$ et la tracer
3) Calculer l'espérance de $X$ en fonction de $a$
4) Quelle valeur faut-il donner à $a$ pour que le jeu soit équitable, c'est à dire qu'il ait une espérance nulle ?

⋆
## Exercice 3

On lance une pièce équilibrée à pile ou face trois fois de suite, et on note $X$ le nombre de Piles obtenus.

1) Déterminer les valeurs prises par $X$
2) Déterminer la loi de $X$ sous forme de tableau
3) Déterminer la fonction de répartition de $X$ et tracer sa courbe représentative dans un repère.

⋆
## Exercice 4

Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On pioche successivement et avec remise $k$ boules dans l'urne, et on note $X$ la valeur maximale inscrite sur les boules tirées.

1) Donner $X(\Omega)$.
2) Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$
3) Calculer $\mathbb{P}(X \leq i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$
4) En déduire la loi de $X$.

⋆
## Exercice 5

Soit $a$ un réel. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $p_i = \dfrac{3a}{2^{i+2}}$.

1) Déterminer la valeur de $a$ telle qu'il existe une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i) = p_i$$

2) Montrer que $X$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[X]$.
3) Montrer que $X$ admet une variance et calculer $V(X)$.

⋆
## Exercice 6

On appelle **médiane** d'une variable aléatoire $X$ n'importe quel réel $x_{1/2}$ tel que

$$\mathbb{P}\Big(X \leq x_{1/2}\Big) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\Big(X \geq x_{1/2}\Big) \geq \frac{1}{2}$$

Si $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ avec $I$ égal à $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ et que les $x_i$ sont rangés dans l'ordre croissante, montrer que $x_{1/2}$ est la plus petite valeur de $x_i$ telle que $\mathbb{P}(X \leq x_{1/2}) \geq \dfrac{1}{2}$.

⋆ ⋆
## Exercice 7

On considère une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2 \times 3^{|k|}}$$

1) Vérifier que $X$ est une variable aléatoire bien définie.
2) Montrer que $X$ admet un moment d'ordre 1 et un moment d'ordre 2, et calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
3) Montrer que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \dfrac{3}{2a^2}$

⋆
## Exercice 8

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$$

⋆
## Exercice 9

Soit $q \in ]0, 1[$ et soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - q^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière inférieure de $x$, c'est à dire l'unique entier relatif $n$ tel que $n \leqslant x < n+1$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
2) Montrer que $F$ est croissante
3) Montrer qu'il existe une variable aléatoire $X$ telle que $F$ est la fonction de répartition de $X$.

⋆
## Exercice 10

Soit $\lambda > 0$ un réel et soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

1) On pose $Y = X^2$. Déterminer pour quelles valeurs de $\lambda$ la variable aléatoire $Y$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[Y]$ le cas échéant.
2) On pose $Z = X!$. Déterminer pour quelles valeurs de $\lambda$ la variable aléatoire $Z$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[Z]$ le cas échéant.

⋆
## Exercice 11

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p$ avec $p \in ]0\,;1[$. On pose $Y = \mathrm{e}^X$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'entier $r$ pour que $Y$ admette un moment d'ordre $r$ et calculer $E[Y^r]$ lorsque c'est possible.

⋆ ⋆
## Exercice 12

**(D'après oraux ENS 2019)** Un gardien de nuit dispose de 10 clés indiscernables dans l'obscurité, et dont une seule permet d'ouvrir une certaine porte. Selon son état, il a deux méthodes possibles pour ouvrir la porte :

**A.** À jeun, il effectue des essais successifs en retirant les clés déjà essayées.

**B.** Ivre, à chaque nouvel essai, il utilise une clé prise au hasard parmi les 10 clés.

On note $X_A$ le nombre de clés essayées (y compris la bonne) avant d'ouvrir la porte dans le cas **A** et $X_B$ le nombre de clés essayées (y compris la bonne) avant d'ouvrir la porte dans le cas **B**.

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_A$ et son espérance
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_B$ et son espérance
3) On sait que le gardien est ivre un jour sur quatre. Un jour, après avoir essayé 8 clés, il n'a toujours pas réussi à ouvrir la porte. Calculer la probabilité pour qu'il soit ivre.

⋆⋆⋆
## Exercice 13

Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages avec remise et on note $Y_k$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts qui ont été tirées lors des $k$ premiers tirages. On pose $Y_0 = 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $Z_k$ la variable aléatoire égale à 1 si le $k$-ième tirage amène un numéro qui n'a pas encore été tiré, et égale à 0 sinon. On remarque que $Z_1 = 1$.

1) Déterminer la loi de $Z_2$.
2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}_{\{Y_k=j\}}(Z_{k+1} = 1)$. En déduire : $\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\mathbb{E}[Y_k]$
3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :
$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(Z_j = 1)$$
4) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.
5) Déterminer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espérance de $Y_k$.

⋆
## Exercice 14

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{E}[X]$ existe et $\mathbb{P}(X > 0) > 0$.
Soit $Y$ la variable aléatoire définie par
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}[X]}$$

1) Montrer que la variable aléatoire $Y$ est bien définie.
2) On suppose dans cette question que $X$ suit une loi de Poisson. Montrer que $X + 1$ et $Y$ ont la même loi.
3) Réciproquement, on suppose dans cette question que $Y$ et $X + 1$ on la même loi. Montrer que $X$ suit une loi de Poisson.

⋆⋆⋆
## Exercice 15

**(D'après oraux ESCP 2016)** On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ et de $n$ boules numérotées de 1 à $n$ (avec $n \geq 2$). Soit $m$ un entier fixé tel que $0 \leq m \leq n$. On place au hasard $m$ boules dans l'urne $U_1$ et les $n - m$ autres dans l'urne $U_2$. On choisit au hasard un entier $j$ de $[\![1, n]\!]$ et on déplace la boule numéro $j$ de l'urne dans laquelle elle se trouve pour la mettre dans l'autre urne.
On répète indéfiniment cette expérience. Pour tout $k \geq 1$, on note $X_k$ la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne $U_1$ à l'issue des $k$ premières expériences.

1) Donner la loi de $X_1$ et calculer $\mathbb{E}(X_1)$
2) Déterminer pour tout $k$ et pour tout $i$ une relation entre $\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$, $\mathbb{P}(X_k = i - 1)$ et $\mathbb{P}(X_k = i + 1)$.
3) Soit $G_k$ le polynôme défini par $G_k(t) = \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X_k = i)t^i$.
   a) Donner une expression de $\mathbb{E}(X_k)$ à l'aide de la fonction $G_k$
   b) Déterminer une relation entre $G_{k+1}(t)$, $G_k(t)$ et $G'_k(t)$.
   c) En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de $n$. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty}\mathbb{E}(X_k)$

⋆⋆⋆
## Exercice 16

Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet une espérance.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$
2) Montrer que $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > n)$.

⋆⋆⋆
## Exercice 17

On lance un dé truqué qui tombe sur 6 avec probabilité $p$. On le lance plusieurs fois de suite et on note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués au moment ou on obtient 6 pour la $r$-ième fois. Déterminer la loi suivie par $X$.

⋆⋆
## Exercice 18

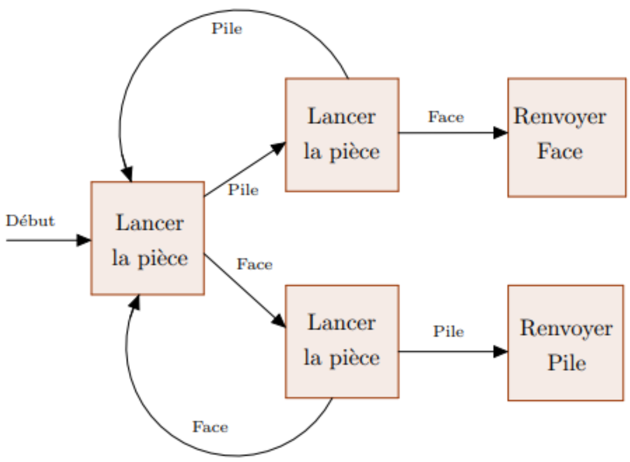
Un sac contient $n$ pièces numérotées de 1 à $n$. On pioche une pièce au hasard et on la lance. On note $X$ le numéro de la pièce, et on pose $Y = kX$ avec

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si la pièce est tombée sur face} \\ -1 & \text{si la pièce est tombée sur pile} \end{cases}$$

1) Déterminer la loi suivie par $X$
2) Calculer l'espérance de $X$
3) Déterminer la loi suivie par $Y$
4) On pose $Z = Y^2 - X$. Calculer l'espérance de $Z$

⋆⋆
## Exercice 19

**(D'après ENS 2017)** On dispose d'une pièce truquée qui renvoie « pile » avec une probabilité $p \in ]0, 1[$ et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann a imaginé l'algorithme suivant (où les lancers successifs de la pièce truquée se font indépendamment) :




On note $T \in \{2, 4, 6, ...\}$ la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers néccessaire pour que l'algorithme se termine, et $R \in \{P, F\}$ le résultat de l'algorithme (où on note $P$ pour « pile » et $F$ pour « face »).

1) Que valent $T$ et $R$ si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFPPPFFP$ ?
2) Démontrer que pour tout $k > 1$,

$$\mathbb{P}(T = 2k) = (p^2 + (1-p)^2)^{k-1} 2p(1-p)$$

En déduit que l'algorithme se termine presque sûrement, c'est à dire que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.

3) Démontrer que l'algorithme renvoie bien « pile » ou « face » avec même probabilité, c'est à dire que $\mathbb{P}(R = \textit{pile}) = \frac{1}{2}$.
4) Calculer $\mathbb{E}[T]$.

⋆⋆⋆
## Exercice 20

**Entropie d'une variable aléatoire discrète (d'après BCE ESSEC 2019)**

**Partie A : Logarithme de base** 2

La fonction logarithme de base 2, notée $\log_2$, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log_2(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$, où ln est la fonction logarithme népérien.

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $\log_2(xy) = \log_2(x) + \log_2(y)$.
2) Vérifier que pour tout réel $\alpha$, $\log_2(2^\alpha) = \alpha$.
3) Montrer que la fonction $\log_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\log_2'(x)$.
4) On considère la fonction $f$ définie pour tout $t \in [0\,;1]$ par

$$f(t) = \begin{cases} -t\log_2(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

   a) Démontrer que $f$ est continue sur $[0\,;1]$
   b) Étudier les variations de $f$ sur $[0\,;1]$
   c) Montrer que la limite de $f'(t)$ lorsque $t$ tend vers 0 est $+\infty$.
   d) Tracer la courbe représentative de $f$ sur $[0\,;1]$. On pourra utilise $0,36 < e^{-1} < 0,37$

**Partie B - Entropie** Dans cette partie, on considère $X$ une variable aléatoire de loi à support dans $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ où $n$ est un entier naturel telle que $\forall k \in \{0, 1,..., \}$, $\mathbb{P}(X = k) > 0$. On appelle **entropie** de $X$ le réel

$$H(X) = \sum_{k=0}^{n} -\mathbb{P}(X = k)\log_2(\mathbb{P}(X = k))$$

5) On définit la fonction $g : \{0,..., n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $g(k) = \log_2(\mathbb{P}(X = k))$ pour $k$ élément de $\{0, 1,..., n\}$. Montrer que $H(X) = -\mathbb{E}(g(X))$.
6) Montrer que $H(X) \geq 0$
7) Soit $p$ un réel tel que $0 < p < 1$. On suppose dans cette question que $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$.
   a) Calculer $H(X)$ en fonction de $p$. On note $\psi$ la fonction qui à $p$ associe $H(X)$.
   b) Justifier que $\psi$ est deux fois dérivable sur $]0\,;1[$ et montrer que pour tout $p \in ]0\,;1[$ on a $\psi''(p) < 0$
   c) Calculer $\psi'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et en déduire la valeur $p_0$ où $\psi$ est maximale.
8) On suppose dans cette question que la loi de $X$ est à support $\{0, 1, 2, 3\}$. Calculer l'entropie de $X$
   a) si $X$ suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3\}$
   b) si $X$ suit la loi :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$$

**Partie C - Entropie maximum**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et soit $X$ une variable aléatoire à support dans $\{1, 2,..., n\}$. Le but de cette partie est de montrer que l'entropie de $X$ est maximale si $X$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2,..., n\}$. Pour tout $k \in \{1, 2,..., n\}$, on note $p_k$ le réel $\mathbb{P}(X = x_k)$.

Soit $U$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, 2,..., n\}$.

9) Montrer que $H(U) = \log_2(n)$.
10) Montrer que $H(U) - H(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2\left(\dfrac{1}{np_k}\right)$.
11) Montrer que pour tout $x > 0$, $\log_2(x) \leq \dfrac{1}{\ln(2)}(x - 1)$.

    *Indication :* On pourra étudier la fonction $f : x \mapsto \log_2(x) - \dfrac{1}{\ln(2)}(x - 1)$ définie sur $]0\,;+\infty[$.
12) Déduire des questions précédentes que $H(U) - H(X) \geq 0$. Conclure.